جمهوری اسلامی ایران

اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران

اداره آموزش و پرورش منطقه هفت تهران

ش صندلی (ش داوطلب) :	نام واحد آموزشی : دبیرستان هاتف	نوبت امتحانی : نیمسال اول
نام و نام خانوادگی :	نام پدر : پایه : چهارم	رشته :ریاضی و فیزیک
سؤال امتحان درس : دیفرانسیل	نام دبیر: آقای هاشمی	سال تحصیلی : ۹۲ - ۹۱

ساعت امتحان: ۸ صبح

وقت امتحان : ۱۲۰ دقیقه

تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۱۰/۹

تعداد برگ سؤال: یک برگ

۱- ثابت کنید عضو بی‌اثر عمل ضرب، منحصر به‌فرد است. ۱

۲- مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{R}: x^{2}+x-2<0\}$ را به‌صورت یک همسایگی متقارن نوشته و مرکز و شعاع آن‌را مشخص کنید. ۱

۳- ثابت کنید دنباله‌ی $\left\{\left(\frac{1}{n+1}\right)\cos \pi n\right\}$ غیریکنوا، کراندار و همگراست. ۲

۴- به کمک تعریف حد دنباله، ثابت کنید: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^{2}+3}{2n^{2}-25}=1$ ۱٫۵

۵- اصل موضوع تمامیت را بنویسید. ۰٫۵

۶- نقطه‌ی همگرایی دنباله‌ی $a_n=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n-1}$ را مشخص کنید. ۱٫۵

۷- ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & : x \text{ گویا} \\ x & : x \text{ گنگ} \end{cases}$ در نقطه‌ی گویای a دارای حد نیست. ۱

۸- حد های زیر را پیدا کنید: ۴

الف) $\lim\limits_{x\to1}(1-x^{2})\tan\frac{\pi x}{2}$ ب) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^{2}+x+1}-\sqrt{x^{2}-x+1}\right)$ ت) $\lim\limits_{x\to3^{+}}\frac{\lfloor x\rfloor-2}{x-3}$

۹- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^{2}-4}{\sqrt{x^{2}+4x+4}} & : x<-2 \\ a & : x=-2 \\ b+\lfloor x^{2}\rfloor & : x>-2 \end{cases}$ در $x_0=-2$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را بیابید. ۲

پاسخ سؤالات در روی برگ سؤال نوشته شود، نیاز به پاسخ‌نامه سفید ندارد. ☐ پاسخ‌نامه سفید داده شود.

۱۰ - معادلات مجانب‌های تابع $f(x) = x\sqrt{\frac{4x-1}{x+2}}$ را تعیین کنید. ۲

۱۱ - حدود a را چنان تعیین کنید که معادله‌ی $x^3 + ax + 2 = 0$ در بازه‌ی $(-1,2)$ دارای حداقل یک ریشه‌ی حقیقی باشد. ۱٫۵

۱۲- با استفاده از قضیه‌ی فشردگی، حاصل $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ را پیدا کنید. ۲

۲۰

جمهوری اسلامی ایران

اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران

اداره آموزش و پرورش منطقه هفت تهران

راهنمای تصحیح درس : دیفرانسیل	نام واحد آموزشی : دبیرستان هاتف	ساعت امتحان: ۸ صبح
نوبت امتحانی : نیمسال اول	نام دبیر : آقای هاشمی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۱۰/۹
رشته های : ریاضی و فیزیک	پایه : چهارم	تعداد برگ راهنمای تصحیح : دو برگ
سال تحصیلی : ۹۲-۱۳۹۱		

۱- فرض کنیم e_1 و e_2 دو عضو بی‌اثر عمل ضرب باشند، کافی است ثابت کنیم $e_1 = e_2$. برای این منظور به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$e_1 = e_1 \times e_2$ زیرا e_2 عضو بی‌اثر عمل ضرب است

$= e_2 \times e_1$ زیرا عمل ضرب، دارای خاصیت جابه‌جایی است

$= e_2$ زیرا e_1 عضو بی‌اثر عمل ضرب است

۲- از تعیین علامت نابرابری $x^2 + x - 2 < 0$ نتیجه می‌شود $-2 < x < 1$؛ مرکز این همسایگی، نقطه‌ی $-0/5$ و شعاعش $1/5$ است.

۳- می‌دانیم $\cos \pi n = (-1)^n$، درنتیجه دنباله به‌صورت $\frac{(-1)^n}{n+1}$ است و داریم $\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| \le \frac{1}{2}$، پس دنباله کراندار است. واضح است که جملات با شماره‌ی فرد، منفی و جملات با شماره‌ی زوج، مثبت هستند، در نتیجه، دنباله، نوسانی و بنابراین غیر یکنواست. با افزایش n ، مخرج دنباله بی‌کران افزایش می‌یابد درصورتی که صورت آن ± 1 است، پس دنباله به صفر همگراست.

۴-

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \ni \quad n \ge M \Rightarrow \left|\frac{2n^2+3}{2n^2-25} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{28}{2n^2-25}\right| < \varepsilon \xrightarrow{n \ge 4} \frac{28}{2n^2-25} < \varepsilon \Rightarrow 2n^2 - 25 > \frac{28}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n^2 > \frac{28 + 25\varepsilon}{2\varepsilon} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{28+25\varepsilon}{2\varepsilon}}$$

پس کافی است $M \ge \left[\sqrt{\frac{28+25\varepsilon}{2\varepsilon}}\right] + 1$ باشد.

۵- هر مجموعه‌ی ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کران‌دار باشد، دارای کوچک‌ترین کران بالایی است.

۶-

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \times \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right]^2 = 1 \times \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right]^2$$

اگر فرض کنیم $n+1=k$، آن‌گاه $n=k-1$ و چنان‌چه $n \to +\infty$ ، آن‌گاه $k \to +\infty$ ، پس داریم:

$$= \left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right]^2 = \left[\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k-1}\right]^2 = \left[\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \times \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-1}\right]^2 = [e \times 1]^2 = e^2$$

۷- اگر a ، عددی گویا و n ، عددی طبیعی باشد، آن‌گاه تمام جملات دنباله‌ی $\{a_n\}=\{a+\frac{1}{n}\}$ گویا و تمام جمله‌های دنباله‌ی $\{b_n\}=\{a+\frac{\sqrt{3}}{n}\}$ ناگویا هستند. اکنون داریم:

$$\begin{cases} f(a_n)=f(a+\frac{1}{n})=a+\frac{1}{n}+1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(a+\frac{1}{n}+1)=a+1 \\ f(b_n)=f(a+\frac{\sqrt{3}}{n})=a+\frac{\sqrt{3}}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} a+\frac{\sqrt{3}}{n}=a \end{cases}$$

چون $a\neq a+1$، پس تابع f در هر نقطه با طول گویای a دارای حد نیست.

-۸

الف) اگر قرار دهیم $x=u+1$، چنان‌چه $x\to 1$، آن‌گاه $u\to 0$ و داریم:

$$\lim_{x\to1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to1}(1-x)(1+x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{u\to0}-u(2+u)\tan\frac{\pi(u+1)}{2}=-\lim_{u\to0}u(2+u)\underbrace{\tan\left(\frac{\pi u}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}_{=-\cot\frac{\pi u}{2}}=$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{u}{\tan\frac{\pi u}{2}}(2+u)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\times(2+0)=\frac{4}{\pi}$$

ب)

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\overbrace{(\sqrt{x+2}-\sqrt{3})(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}^{=x+2-3=x-1}}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

پ)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1-x^2+x-1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}+\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\times1+|x|\times1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x-x}=-1$$

ت)

$$\lim_{x\to3^+}\frac{\lfloor x\rfloor-2}{x-3}=\lim_{x\to3^+}\frac{3-2}{x-3}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

۹- شرط لازم و کافی برای این‌که تابعی در یک نقطه، پیوسته باشد آن است که حد تابع در آن نقطه، با مقدار تابع در آن نقطه، برابر باشد. واضح است که $f(-2)=a$ و نیز داریم

$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\left(b+\lfloor x^2\rfloor\right)=b+3$$

$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{(x-2)(x+2)}{|x+2|}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{(x-2)(x+2)}{-(x+2)}=\lim_{x\to(-2)^-}-(x-2)=4$$

برای پیوسته بودن، باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=f(-2)\Rightarrow b+3=4=a\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$$

۱۰- چون $\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-} x\sqrt{\frac{4x-1}{x+2}}=-\infty$ ، پس خط $x=-2$ مجانب قائم تابع است و چون $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ، پس تابع دارای مجانب افقی نمی‌باشد. از طرفی از آن جا که $a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{4x-1}{x+2}}=2$ و

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\sqrt{\frac{4x-1}{x+2}}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{\frac{4x-1}{x+2}}-2\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(\frac{4x-1}{x+2}-4\right)}{\sqrt{\frac{4x-1}{x+2}}+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-9x}{x+2}}{\sqrt{\frac{4x-1}{x+2}}+2}=\frac{-9}{2+2}=\frac{-9}{4}$$

پس خط $y=2x-\frac{9}{4}$ مجانب مایل هر دو شاخه‌ی راست و چپ تابع است.

۱۱ - تابع $f(x)=x^3+ax+2$ در بازه‌ی $[-1,2]$ پیوسته است و برای این‌که در این بازه دست‌کم دارای یک ریشه باشد، باید داشته باشیم:

$$f(-1)f(2)<0\Rightarrow[(-1)^3+a(-1)+2][2^3+a\times2+2]<0\Rightarrow(1-a)(2a+10)<0\Rightarrow a<-5 \text{ یا } a>1$$

۱۲- به‌ازای هر x به‌جز صفرداریم $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}$ ، اگر $x>0$ ، آن‌گاه $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leq1$ و چون $\lim_{x\to0^+}1-x=\lim_{x\to0^+}1=1$ ، درنتیجه $\lim_{x\to0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$. اگر $x<0$ ، آن‌گاه $1-x>x\left[\frac{1}{x}\right]\geq1$ و چون $\lim_{x\to0^-}1-x=\lim_{x\to0^-}1=1$ ، پس $\lim_{x\to0^-}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$ ، بنابراین $\lim_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.